Dieser Text entstand für Fortbildungen im Grundschulbereich, die sich dem mathematischen Förderpotenzial lebenspraktischer Situationen befasste: „Mathematik im Alltag“, Grundschultage Bad Wildbad 2013.

Einblicke in die Entfaltung quantitativer Denkprozesse

...um Kinder in praktischen Lebens- und Spielsituationen in ihrer mathematischen Entwicklung fördern zu können

adelheid müller

Wenn wir an Mathematik denken, fallen uns Zahlen – nein eigentlich Ziffern – ein, wir denken an Rechnungen. Wir gehen fast täglich mit Ziffern und notierten Rechenzeichen um und vergessen leicht, dass sie nur die äußeren Symbole für Handlungen sind.

Wie ereignet sich Rechnen im Gehirn?

Das eigentliche Rechengeschehen steckt im Bearbeiten der Handlung und nicht im Hinschreiben der Zahlzeichen. Unser Gehirn orientiert sich zur inneren Darstellung von übertragbaren Rechenvorstellungen an vereinfachten Handlungsvorstellungen, weil das Speichern von konkreten Einzelbildern für jeden Gegenstand und jede Anzahl für das Gehirn zu aufwändig wäre. Durch diesen Abstraktionsvorgang besteht die Möglichkeit, das Wort „drei“ aussprechen und auf beliebige Objekte anwenden zu können: auf drei Kinder, drei Teller, drei Tassen, drei Kuchen... Die innere abstrahierte Vorstellung repräsentiert eine Menge von drei abgegrenzten Einheiten z.B. □ □ □ oder o o o . Wenn schon drei Kinder in der Gruppe sind und noch zwei dazu stoßen, könnte die abstrakte innere Vorstellung folgendermaßen aussehen: □ □ □ □ □ oder

.

Mit solchen an Handlungen orientierten abstrakten Zahlen- und Rechenvorstellungen arbeiten wir schon seit Jahrtausenden – lange bevor wir Zahlzeichen und Rechensymbole kannten. Ohne die Bildung einer übertragbaren Mengenvorstellung, hätten wir nicht überlebt. Menschen benötigen von allen Grundversorgungsmitteln eine bestimmte Menge zum Überleben. Wir waren und sind darauf angewiesen, sie passend zu beschaffen, zu teilen und zu bevorraten, denken wir z.B. an zu sammelnde Wurzeln und Früchte. Auch das Einschätzen der Entfernung zum Übernachtungsplatz, der Zeitspanne für eine Unternehmung, für eine Schwangerschaft oder bis zum Wintereinbruch oder der Länge und Breite eines gewünschten Baumstamms bedarf seit Urzeiten der Fähigkeit zur Verarbeitung quantitativer Strukturen.

Bedingt durch unsere Körper können wir nicht *nichtquantitativ* leben.

Der Hirnforscher Dehaene vermochte - angeregt durch die Arbeit mit Menschen, die eng eingegrenzte Schädigungen im Gehirn aufwiesen - die Aktivität bestimmter Areale bei der Verarbeitung quantitativer Informationen zu beobachten. Sein Buch „Der Zahlensinn und warum wir rechnen können“ (Dehaene1999) vermittelt grundlegende Einsichten zur Verarbeitung von Mengen, Größen und quantitativen Beziehungen aus neurologischer Sicht. Dehaene entwickelte das Triple-Code-Modell, das beschreibt, welche Gehirnregionen beim Rechnen beteiligt sind und zusammenspielen:

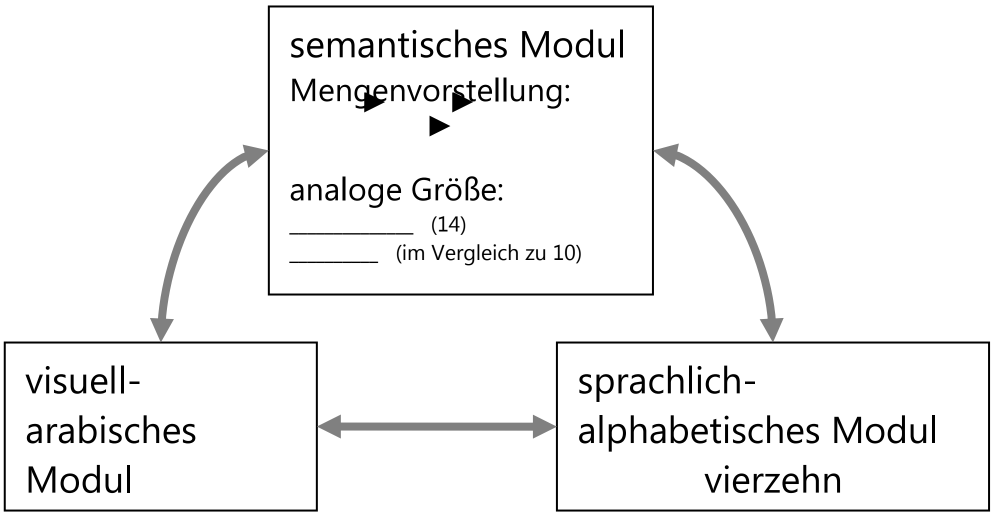

Abb.1: Triple-Code-Modell angelehnt an Dehaene (1992), ergänzt durch die Mengenvorstellung und die Vergleichslänge von 10 im semantischen Modul.

Im sprachlich-alphabetischen Modul sind die Zahlnamen sowie deren Schreib- und Ausdrucksweise gespeichert. Dieses Modul befindet sich in den sprachverarbeitenden Regionen, die in der Regel in der linken Gehirnhälfte platziert und mit der auditiven Informationsverarbeitung verbunden sind. Die Ziffernschreibweise wird im visuell-arabischen Modul verarbeitet und liegt in beiden Gehirnhälften in den Schläfenlappen der Hirnrinde. Im semantischen Modul findet die oben erwähnte, an der Bedeutung orientierte abstrakte Vorstellung statt. Hier werden kleine Mengen erfasst (Subitizing), Zahlen geschätzt und Zahlbeziehungen beurteilt. Das semantische Modul arbeitet sprachunabhängig und nützt als Darstellungswerkzeug für Zahlen etwa ab Fünf einen innerlich visualisierten Zahlenstrahl (vgl. Dehaene 1999, Schröder 2012). Die geometrisch strukturierten Informationen dieses Moduls sind in einem Gehirnfunktionsbereich zu verorten, der für das Vorstellen und Verarbeiten räumlicher Informationen und Zusammenhänge zuständig ist[1]. Die Repräsentationen im semantischen Modul werden als zentral für das Verständnis von Rechenprozessen eingestuft.

[1] Zuordnungen von Orten und Funktionen im Gehirn können auf der Internetseite von Christian Siedenkopf (2005) zur funktionalen Magnetresonanzspektroskopie nachgelesen werden.

Kurz gefasst:

- Rechnerisches Denken bzw. Rechnen ist aus existenziellen Gründen entstanden. Wir Menschen sind mit definierten Größeneigenschaften versehen und müssen daher zum Überleben Größeneinschätzungen und –verrechnungen bewältigen.
- Rechnen wird im Denken nicht in erster Linie in Form von Zahlzeichen repräsentiert.
- In Schriftsprachkulturen arbeiten beim Rechnen drei Funktionsbereiche des Gehirns zusammen: das semantische Modul, das visuell-arabische Modul und das sprachlich-alphabetische Modul.
- Das semantische Modul spielt für das Rechenverständnis eine

Es ist nun umrissen, wie Rechnen im Kopf funktioniert - wenn es funktioniert. Davon ist bei knapp einem Viertel der Jugendlichen mit 14 bis 15 Jahren nicht auszugehen, denn „etwa 24 % der 15-Jährigen in Deutschland sind nicht in der Lage, die einfachsten rechnerischen Anforderungen zu bewältigen, wie sie etwa im Rahmen der beruflichen Ausbildung in den meisten Lehrberufen gefordert werden. Zwar können die meisten dieser Schüler(innen) einfache Aufgaben unter Verwendung der Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) richtig lösen, jedoch scheitern sie bei solchen Anforderungen, die eine einfache Kombination der Grundrechenarten verlangen." (Hasselhorn und Gold 2009, S.128) Nach Fritz-Stratmann (2010, S. 32) liegen die Ursachen in der frühen Lernentwicklung.

Wie entwickelt sich die Verarbeitung quantitativer Informationen?

Um eine leistungsfähige abstrakte Mengen- und Größenvorstellung aufbauen können, muss ein Kind Informationen aus seiner Umwelt unter ausgewählten Gesichtspunkten reduzieren können. Es muss die für das Mengenverständnis wesentliche Eigenschaft des „Wie viel" herausfiltern und alle anderen Merkmale ignorieren können. Dazu muss es seine Aufmerksamkeit so steuern können, dass es das wesentliche Merkmal im Auge behalten kann. Dafür braucht das Kind einen inneren Grund, eine Motivation. Zur Vorstellung des „Wie viel" benötigt es außerdem das innere „Werkzeug" einer gewissen räumlichen Vorstellungsfähigkeit. Je komplexer die zu bearbeitenden Mengenbeziehungen werden, umso differenzierter muss dieses innere Werkzeug sein.

Ein Beispiel: Die vierjährige Luisa spielt mit drei anderen Kindern ein Rollenspiel. Sie möchte für jedes Kind einen Keks holen. Dazu reduziert sie die wahrgenommenen Informationen aus ihrer Umwelt auf dafür wesentliche Elemente: Zuerst richtet sie die Aufmerksamkeit auf die drei Kinder und sich selbst, ignoriert dann alle Eigenschaften an den Kindern (Größe, Stimme, Sympathie, Geschlecht, Kleidung, Haarfarbe, Verhalten) bis auf die Einheit „Kind". Nun merkt sie sich vier Kinder in Form von vier Einheiten als abstraktes Mengenbild und überträgt diese Information auf die Einheit „Keks". Dazu muss sie unterwegs zur Küche das nun wichtige Merkmal „Vier Einheiten" behalten. Als Motivation dient das Ziel jedem Kind einen Keks, also gleich viel zukommen lassen zu wollen. Die Übertragung der Eigenschaft der Menge „Vier" von Kindern auf Kekse ist eine Abstraktionsleistung. Automatisch hat Luisa die Zahl Vier nur aus gleichen Einheiten zusammengebaut, etwa aus vier Kindern und nicht etwa aus drei Kindern und einem Keks. Die mathematische Regel „nur Gleiches mit Gleichem zusammenzählen" ergibt sich durch den angewandten und damit sinnhaft besetzten Zusammenhang von selbst.

Für größere Anzahlen wird die innere Mengenvorstellung etwa ab Schuleintritt weiter abstrahiert: Voneinander abgegrenzt vorgestellte

Einheiten werden zu Längeneinern, die zu zahlenstrahlähnlichen Strichen verschmelzen (vgl. Müller 2013):

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

↓

---------- = 10

Gelingt einem Kind dieser weitere Abstraktionsschritt hin zur räumlich-analogen Zahlenraumvorstellung, vereinfacht sich die innere Repräsentation von Zahlbeziehungen. Die jeweils zu behandelnde (An-)Zahl wird mit einer gängigen, bekannten oder relevanten Zahl verglichen, z.B. 7 mit 10:

7 im Vergleich

zu 10

Für Abstraktionsleistungen muss die Aufmerksamkeit für eine ausreichende Zeitspanne auf dem wesentlichen Merkmal gehalten werden können. Wird der Konzentrationsprozess gestört, kommt die Übertragung möglicherweise nicht zustande. Für die Vorstellung der abstrakten Menge und der Handlung wird das räumliche Vorstellungsvermögen benötigt.

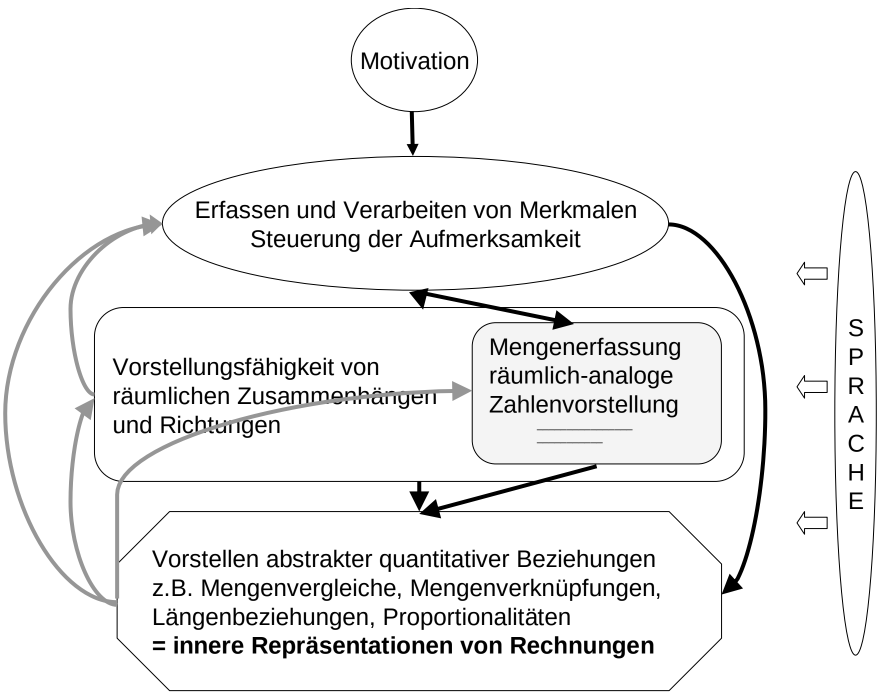

Abb. 2: Grunddynamik des Aufbaus mathematischer Denkstrukturen.

Das Zusammenspiel der erwähnten Fähigkeitsbereiche beginnt nach der Geburt auf einfachem Niveau. Mit einem halben Jahr kann die Aufmerksamkeit noch wenig gesteuert werden, nur einfache räumliche Strukturen können erfasst werden, bei sehr kleinen Mengen (z.B. zwei) Anzahländerung bemerkt werden. Mit zunehmender Entwicklung differenzieren sich die Fähigkeiten aus, das Zusammenspiel wird komplexer: Größere Mengen können unterschieden werden, Längenverhältnisse eingeschätzt, räumliche Strukturen übertragen, Perspektiven gewechselt, Mengenbeziehungen hergestellt und Mengenänderungen vorhergesagt werden. Mit diesen Entwicklungen eng verwoben wächst die Fähigkeit zu sprechen, z.B. Positionen und Mengen zu benennen. Durch den sinnhaften Umgang mit Zahlwörtern werden Mengenvorstellungen vertieft. Das verbale Zählen erfolgt zunächst bedeutungsunabhängig, etwa wie bei einem Gedicht (vgl. Luit, Rijt und Hasemann 2001). Dann wird jedes Zahlwort mit seiner Nummerneigenschaft verbunden, weil das Kind beim Nennen einer Zahl auf *einen* Gegenstand zeigt – d.h. es assoziiert „fünf" mit nur einem Gegenstand. Der mathematisch funktionale Zahlcharakter wird erst benutzt, wenn ein Kind die tatsächliche Anzahl auf eine selbstverständliche Weise mit dem Zahlwort verbunden benutzt (kardinales Zahlverständnis) – wie das Triple-Code-Modell zeigt ist dann im Gehirn der Ort für die abstrakte Mengen- oder Zahlraumvorstellung dicht mit dem Ort der Zahlwortrepräsentation synaptisch verwoben.

Die Entwicklung ereignet sich am besten in Zusammenhängen, in denen eine Anzahl relevant ist, aus irgend einem Grund das Interesse erweckt. Quantitative Informationen werden benannt und sprachlich ausgetauscht, verglichen und überprüft. Das treibt die Entwicklung entscheidend voran, wenn die Sprache dabei möglichst eindeutig benutzt wird.

Die zunehmende Fähigkeit quantitative Strukturen zu verarbeiten ermöglicht logische Schlussfolgerungen. Dadurch lernen Kinder einzuschätzen, durch welche Öffnung sie hindurch kriechen können, welche Schuhe ihnen passen werden, wie viel Essen sie wirklich vertilgen werden, welchen Holzklotz sie zu tragen vermögen, auf welchen Gegenstand sie klettern müssen, um zu dem gewünschten Fach im Regal zu gelangen, von welchem Ast sie gefahrlos herunter springen können, wie sie die gesammelten Kastanien teilen müssen, um selbst noch genügend zu haben – die Liste könnte lange weitergehen. Die Welt wird durch die Entwicklung quantitativer Erfassungs- und Verarbeitungsstrukturen vorhersehbarer, handhabbarer, steuerbarer. Probleme werden durch ausgedachte Strategien bewältigbar. Das ist eine kräftige Motivation für dieses Lerngeschehen. Entsprechende Lernanlässe liegen reichlich in der Bewältigung unserer alltäglichen Existenz, weil – wie eingangs erwähnt – unsere Rechenfähigkeit deswegen entstanden ist.

Kurz gefasst: Das eingehende Verständnis der Entwicklung logisch-mathematischen Denkens ermöglicht deren Unterstützung in alltäglichen Lebenszusammenhängen. Zur pädagogischen Förderung kann an kindlichen Handlungsimpulsen angeknüpft werden. Kinder fühlen sich dadurch in ihrer Eigenaktivität bestätigt. Das erhält die Lust am Lernen, am Aktivsein – auch wenn es

Wie können wir das mathematische Bildungspotenzial praktischer Lebens- und Spielsituationen nutzen?

Als wir oben das Handlungselement von Luisa durch die Lupe betrachteten, sahen wir, wie viele Denkprozesse und Fähigkeiten bei kleinen alltäglichen Situationen angewandt und benötigt werden. Wenn wir das innere Geschehen zu verstehen beginnen, eröffnet sich die Möglichkeit Lernentwicklungen im Mathematikunterricht oder im übrigen Alltag noch besser zu beurteilen. Wir bekommen einen schärferen Blick für das Lernpotenzial, das in einer Alltagssituation stecken kann und wie wir ein

Geschehen so begleiten können, dass das Potenzial zur Entfaltung gebracht wird. Wir lernen zu unterscheiden, wann eine mathematisch erscheinende Handlung tatsächlich logisch verstanden ist oder wann etwas schematisch wiederholt wird, weil das betreffende Kind mit seinen Vorstellungsfähigkeiten noch nicht anknüpfen kann. Unser Fokus richtet sich neben dem äußeren Erscheinungsbild einer Handlung auch auf das Ertasten der inneren Vorgänge der Kinder.

Was in diesem Artikel bisher nicht erwähnt worden ist - aber keinesfalls vergessen werden darf – sind die Bedingungen, die einem Kind lustvolles Entdecken und damit Lernen überhaupt erst ermöglichen. Dazu zählen wertschätzende Interaktionen, ein soziales Umfeld, in dem sich ein Kind emotional aufgehoben fühlt und eine Umgebung, in der ein Kind seine Sinne öffnen kann und sich zu entspannen vermag. Wenn vor solch einem Hintergrund Aufgaben – ob nun klassische Schulaufgaben oder Anforderungen des übrigen Alltags – einen quantitativen Bezug aufweisen und mit bewältigbaren Hindernissen versehen sind, ist die Chance, dass logisch-mathematisches Lernen stattfindet, hoch.

Ein Beispiel aus der Schulpraxis, 3. Klasse:

Letzter Tag vor den Ferien, in denen das Klassenzimmer gestrichen werden soll. Keiner dachte mehr daran, dass es dazu leer sein muss. Die Lehrerin reagiert spontan und kündigt an, dass die jetzt folgende Stunde zum Ausräumen des Klassenzimmers genutzt wird. Die Schüler der betreffenden Klasse sind von ihr als Klassenlehrerin gewohnt bis zu einem gewissen Grad selbstständig zu agieren, vorgegebene Wege verlassen zu dürfen um verschiedene Lösungen zu probieren. Insgesamt führt sie ihre Klasse so, dass die Kinder auch sie als Lehrerin korrigieren und kritisieren dürfen und daraus konstruktive Situationen entstehen können. Obwohl die Kinder dadurch über eine gewisse Übung im partnerschaftlichen

Zusammenarbeiten verfügen, ist der Lehrerin recht mulmig angesichts der gerade erteilten Aufgabe, für die sie überhaupt nichts vorbereitet hatte.

Die SchülerInnen beginnen von selbst Gegenstände in den Abstellraum der Etage darüber zu schaffen. Ein Lärmen und Rumpeln breitet sich in den Fluren und auf der Treppe aus, so dass der Unterricht anderer Klassen gestört wird. Einige SchülerInnen kommen auf die Idee eine SchülerInnenschlange mit definierten Abständen zu bilden und die Transportgüter von Hand zu Hand zu reichen. Sie wählen die Abstände in der Ebene länger als auf den Treppen. Jetzt ist der Lärm erträglich. Der zuerst ungeordnet befüllte Abstellraum wird von den Kindern selbst irgendwann als problematisch empfunden. Sie beginnen auf die Form und Größe sowie den Zweck und die Stabilität der Gegenstände zu achten. Einige positionieren sich so im Raum, dass sie den Transport steuern können. Diejenigen achten darauf, dass Gegenstände gleicher Größe aufeinander gestapelt werden, die Großen hinten an der Wand und die Kleineren davor. Außerdem fällt anderen auf, dass dies und jenes als erstes wieder benötigt werden wird und also ganz vorne im Raum bleiben muss...

Die Lehrerin war völlig überrascht, wie gut das Projekt lief. Die Kinder hatten Ideen, setzten sie um, beobachteten, korrigierten, erkannten Zusammenhänge und erschlossen sich daraus bessere Lösungen, die sie wiederum umsetzten.

Mathematisches Lernen vom Feinsten: Geometrisches Wahrnehmen, Umgang mit Größenproportionen, mit strategischen Folgezusammenhänge, Bewältigen einer Strecke durch Schaffen von Längeneinern, zweckabhängiges Verwenden von zwei verschiedenen Längeneinern, Sortieren nach mehreren Eigenschaften gleichzeitig (Erschaffen logischer Ordnungshierarchien), Einschätzen von Mengen an sich und als gebündelte Mengen, die Beziehung von Mengen zu anderen Größeneigenschaften wie

Gewicht (Tragbarkeit) oder Volumen ... ein wunderschönes Beispiel mathematischen Lernens in praktischen Lebenssituationen.

Kurz gefasst: Förderliche Bedingungen für lustvolles mathematisches Lernen in praktischen Lebens- und Spielsituationen sind:

- Wertschätzende Interaktionen, angenehme Umgebung
- Ziele, die quantitative Bezüge aufweisen
- Ziele, die Kinder mit eigenem Interesse verfolgen können
- Herausforderungen und Hindernisse, in bewältigbarem Schwierigkeitsgrad
- Entfaltungsraum für kindliche Ideen
    - Genügend Zeit
    - Ein Setting, das flexible und selbstbestimmte Lösungswege zulässt

Literatur

V. Aster, M.; Kucian, K.; Martin, E. (2006): Gehirnentwicklung und Dyskalkulie. Sprache, Stimme und Gehör 30, S. 1-6.

Dehaene, S. (1992): Varieties of Numerical Abilities. Cognition 1992, 44. S. 1-42.

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel, Boston, Berlin.

Fritz-Stratmann, A. (2010): Tragende mathematische Konzepte im Vorschul- und Grundschulalter – Bedeutung, Entwicklungsprobleme und Interventionsansätze. ABAKÜS(S)CHEN, 23, S. 32-47.

Hasselhorn, M.; Gold, A. (2009): Pädagogische Psychologie. Stuttgart, S. 128.
Baumert, J.; Kliene, E.; Neubrand, M.; Prenzel, M.; Schiefele, U.; Shneider, W.; Stanat, P.; Tillmann, K.-J.; Weiß, M. (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.

Luit, van, H.; Rijt, van de, B.; Hasemann, K. (2001) : Osnabrücker Test zur Zahlbe-griffsentwicklung. Göttingen. S. 7-9.

Müller, A. (2013). Entwicklung logisch-mathematischen Denkens. MNU (Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht) Heft 5.

Schröder U. (2012): Triple-Code-Model, ein neurobiologischer Erklärungsansatz. URL: http://www.teddy-pc.de/theorie/triple-code-modell/ [18.11.2012]

Siedentopf, D. (2005): Cortexareale und ihre funktionelle Bedeutung. URL: http://www.fmri-easy.de/start1.htm [18.11.2012]